SUJET DE STAGE DE M2 : COMMANDE PARCIMONIEUSE

ENCADREMENT : MARC JUNGERS ET JÉRÔME LOHÉAC (CRAN)
LIEU : CENTRE DE RECHERCHE EN AUTOMATIQUE DE NANCY

Résumé. Ces dernières décades, la parcimonie (sparsity) a connu un essor important, notamment pour la compression d'images. Plus récemment, des commandes parcimonieuses (sparses) ont été utilisées pour le contrôle ou la stabilisation de systèmes dynamiques. L'objectif de ce stage est d'explorer plus en profondeur la possibilité d'une commande sparse pour des systèmes de contrôle de dimension finie. Une attention sera aussi portée sur le calcul numérique de telles commandes.

1. Problématique générale, Contexte

La recherche de solution sparse a connu un essor ces dernières décades, notamment pour le traitement d'images, cf. par exemple [12]. Plus récemment, des approches sparses ont été proposées pour la contrôlabilité de systèmes multi-agents, cf. par exemple [1, 2, 13]. Notons aussi, qu'en présence de contrainte unilatérale sur le contrôle, un contrôle en temps minimal est naturellement sparse, cf. par exemple [8]. Plus généralement, on pourra se référer à l'article [11].

Considérons le système linéaire de dimension finie,

$$(\star) \qquad \dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(0) = x^0.$$

On notera m la dimension du contrôle u et n la dimension de l'état x. On suppose que le système $(\star)$ est contrôlable, c'est-à-dire que pour tout temps $T > 0$, tout $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ tel que la solution $x(t) = x(t; u, x^0)$ de $(\star)$ satisfasse $x(T) = x^1$. Un tel contrôle peut par exemple être obtenu en minimisant sa norme, typiquement, la norme L^2. En d'autres termes, il est habituel de chercher le contrôle solution du problème d'optimisation suivant :

$$(P_2) \qquad \mathcal{J}_2 = \min \quad \left| \begin{array}{l} \int_0^T |u(t)|^2 \, \mathrm{d}t \\ u \in L^2(0,T)^m, \\ x(T; u, x^0) = x^1. \end{array} \right.$$

Une telle approche conduit à la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method), cf. [3]. En revanche, le support du contrôle obtenu est (sauf si $x^1 = e^{TA}x^0$) l'intervalle $[0,T]$ entier.

L'objectif d'un contrôle sparse est de minimiser le temps d'action du contrôle. Formellement, l'objectif est de résoudre le problème de minimisation :

$$(P_0) \qquad \mathcal{J}_0 = \inf \quad \left| \begin{array}{l} \int_0^T \chi(|u(t)|) \, \mathrm{d}t \\ u \in L^2(0,T)^m, \\ x(T; u, x^0) = x^1. \end{array} \right.$$

où $\chi(s) = 1$ si $s \neq 0$ et $\chi(0) = 0$. Un résultat tiré de [6], assure que la contrôlabilité d'un système linéaire peut-être faite à l'aide d'un nombre fini de masses de Dirac. Ainsi, ce problème de minimisation n'admet pas de minimiseur dans L^2, mais peut en admettre un dans l'espace des mesures.

Un autre souci, dans ce problème de minimisation, est que la fonctionnelle, $u \mapsto \|u\|_{L^0} := \int_0^2 \chi(|u(t)|) \, \mathrm{d}t$ n'est pas convexe. Un problème convexe approchant, qui dans certains cas est équivalent au problème initial, cf. [4, 7, 11], est donné par :

$$(P_1) \qquad \mathcal{J}_1 = \inf \quad \left| \begin{array}{l} \int_0^T |u(t)| \, \mathrm{d}t \\ u \in L^2(0,T)^m, \\ x(T; u, x^0) = x^1. \end{array} \right.$$

En d'autres termes, la pseudo-norme L^0 est remplacée par la norme L^1. Comme précédemment, ce problème de minimisation n'admet en général pas de minimiseur dans L^1. En revanche, il admet un minimiseur dans l'ensemble de mesures de Radon.

courriels : `marc.jungers@univ-lorraine.fr` et `jerome.loheac@univ-lorraine.fr`.

Début du stage mars 2023.

2. Objectifs du stage

L'objectif de ce stage est de mieux comprendre la structure parcimonieuse de tels contrôles, d'étendre les résultats au cadre non linéaire, et de proposer des méthodes numériques efficaces conduisant à des contrôles sparses. Il conviendra donc de s'intéresser à :

— l'extension au cadre non linéaire des résultats succinctement mentionnés au paragraphe précédent. Pour ce faire, un modèle type sera le système de Heisenberg. Dans le cadre du non linéaire, il est aussi nécessaire de bien comprendre l'impact d'un contrôle impulsif. On se référera pour cela au travail effectué dans [10] ;

— l'existence d'un saut de Lavrentiev. Plus précisément, est-ce que l'infimum pour des contrôles L^1 est l'infimum pour des contrôles mesures ? Pour cela, on pourra s'inspirer de [9] ;

— la localisation du support du contrôle. Plus précisément, le contrôle obtenu peut-il être exprimé comme un contrôle évènementiel ("event triggered control") ?

— la construction de méthodes numériques conduisant à des contrôles sparses. Pour cela, on pourra s'inspirer d'algorithmes fondés sur la distance de Bregman, cf. [7, 12], ou sur les reformulations proposées dans [5].

Cette liste de problèmes est bien entendu non exhaustive. L'étudiant pourra par exemple aussi s'intéresser au problème de stabilisation avec des contrôles sparses.

3. Prérequis pour le stage et candidature

Un Master 2 de recherche ou équivalent en cours.

Ce sujet requiert des compétences en automatique/mathématiques appliquées. En plus de maîtriser les connaissances de bases de l'automatique, un bagage en contrôle optimal et en calcul numérique sera souhaitable.

Pour toute personne intéressée par ce sujet, merci d'envoyer vos candidatures à Marc Jungers et Jérôme Lohéac (courriels : `marc.jungers@univ-lorraine.fr` et `jerome.loheac@univ-lorraine.fr`). Les documents requis pour la candidature sont :

— un CV, mentionnant en particulier si vous avez déjà obtenu votre Master 2 recherche ou si vous aller l'obtenir avant cet été, ainsi que le classement que vous avez obtenu avec vos derniers diplômes ;

— derniers relevés de notes ;

— une copie de votre passeport indiquant votre date de naissance, votre lieu de naissance et une adresse actuelle ;

— une lettre de motivation ;

— quelques lettres de recommandation (envoyées directement à nous) ou personne à contacter.

Références

[1] M. Caponigro, M. Fornasier, B. Piccoli, and E. Trélat. Sparse stabilization and optimal control of the Cucker-Smale model. *Math. Control Relat. Fields*, 3(4) :447–466, 2013.

[2] M. Caponigro, M. Fornasier, B. Piccoli, and E. Trélat. Sparse stabilization and control of alignment models. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 25(3) :521–564, 2015.

[3] J.-M. Coron. *Control and nonlinearity.*, volume 136 of *Math. Surv. Monogr.* Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2007.

[4] T. Ikeda and K. Kashima. On sparse optimal control for general linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(5) :2077–2083, 2019.

[5] C. Kanzow, A. Schwarz, and F. Weiß. The sparse(st) optimization problem : Reformulations, optimality, stationarity, and numerical results. Working paper or preprint, 2022.

[6] E. B. Lee and L. Markus. Foundations of optimal control theory. The SIAM Series in Applied Mathematics. New York-London-Sydney : John Wiley and Sons, Inc., 1967.

[7] Y. Li and S. Osher. Coordinate descent optimization for ℓ^1 minimization with application to compressed sensing ; a greedy algorithm. *Inverse Probl. Imaging*, 3(3) :487–503, 2009.

[8] J. Lohéac, E. Trélat, and E. Zuazua. Nonnegative control of finite-dimensional linear systems. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 38(2) :301–346, 2021.

[9] M. Motta, M. Palladino, and F. Rampazzo. Unbounded control, infimum gaps, and higher order normality. *SIAM J. Control Optim.*, 60(3) :1436–1462, 2022.

[10] M. Motta and C. Sartori. On $\mathcal{L}^1$ limit solutions in impulsive control. *Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. S*, 11(6) :1201–1218, 2018.

[11] M. Nagahara. Sparse control for continuous-time systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021.

[12] S. Osher, M. Burger, D. Goldfarb, J. Xu, and W. Yin. An iterative regularization method for total variation-based image restoration. *Multiscale Model. Simul.*, 4(2) :460–489, 2005.

[13] B. Piccoli, N. P. Duteil, and E. Trélat. Sparse control to prevent black swan clustering in collective dynamics. In *2018 Annual American Control Conference (ACC)*, pages 955–960, 2018.